155 : Exponentielle de matrices. Applications.

Dans toute cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Construction de l'exponentielle

1) Définition

Définition/Proposition 1 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach. Puisque la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, on peut définir, pour tout $x \in E$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 2 : La série ci-dessus étant normalement convergente sur tout compact de E, l'application $\exp : E \to E$ est continue.

Proposition 3 : Soit $x, y \in E$. Si $xy = yx$, alors $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Corollaire 4 : Soit $x \in E$. Alors $\exp(x)$ est inversible, d'inverse $\exp(-x)$.

Proposition 5 : Soit $x, y \in E$. Alors $xy = yx$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(t(x+y)) = \exp(tx)\exp(ty)$.

2) Propriétés calculatoires

À partir de maintenant, on s'intéresse à l'algèbre des matrices $M_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 6 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors :

i) $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$

ii) $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$

iii) $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$

iv) $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$

Proposition 7 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Exemple 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = I_2$ et $A^{2n+1} = A$. Donc :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} A = \mathrm{ch}(1) I_2 + \mathrm{sh}(1) A$$

Exemple 9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A = \cos(1) I_2 + \sin(1) A.$$

II) Propriétés analytiques

1) Différentiabilité

Proposition 10 : L'application $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ est de classe C^∞. Sa différentielle en 0 est donnée par : $\forall H \in M_n(\mathbb{K})$, $d_0\exp(H) = H$.

Corollaire 11 : L'application exp réalise un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbb{K})$ sur un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{K})$.

Application 12 : $GL_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit.

2) Équations différentielles

Proposition 13 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'application $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto A\exp(tA)$.

Théorème 14 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \exp(tA)y_0$.

Remarque 15 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On aurait pu définir $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$ comme l'unique solution de $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = I_n \end{cases}$.

Lemme 16 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Alors :

i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda t}$ est valeur propre de $\exp(tA)$.

ii) Pour tout vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ associé à λ, la solution de $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = x \end{cases}$ est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{\lambda t} x$.

Théorème 17 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, de valeurs propres 2-à-2 distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{C}$. Les solutions de $y' = Ay$ sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; y(t) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k t} C_k$$

où, pour tout $1 \leq k \leq p$, $C_k \in \mathbb{C}^n$.

On peut faire mieux, sans l'hypothèse de diagonalisabilité :

Théorème 18 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme minimal $\pi_A = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ où les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont 2-à-2 distinctes dans $\mathbb{C}$. Les solutions du système différentiel $y' = Ay$ sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; y'(t) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k t} P_k(t)$$

où, pour tout $1 \leq k \leq p$, P_k est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $\alpha_k - 1$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

III) Calcul effectif et décomposition de Dunford

1) Matrices diagonales et diagonalisables

Proposition 19 : Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Corollaire 20 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$. Alors $\exp(A)$ est diagonalisables et

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Proposition 21 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de A. Alors e^{λ} est une valeur propre de $\exp(A)$.

Remarque 22 : La réciproque est fausse. En effet, $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = -I_2$ dont la seule valeur propre réelle est -1, qui n'est pas une exponentielle.

2) Matrices nilpotentes

Remarque 23 : Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice $q \geq 1$. Alors,

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}.$$

Définition 24 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est unipotente si $A - I_n$ est nilpotente.

Proposition 25 : Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Alors $\exp(N)$ est unipotente.

Remarque 26 : On montre plus loin que la réciproque est vraie.

3) Décomposition de Dunford

Proposition 27 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ et la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est :

$$\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)\left(\exp(N) - I_n\right)$$

Corollaire 28 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ l'est.

IV) Exponentielle et homéomorphismes

1) Logarithme

Définition 29 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On définit le rayon spectral de A par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|.$$

Proposition 30 : On a :

i) Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $\rho(A) = 0$

ii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique ou hermitienne, alors $\rho(A) = \|A\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 31 : Soit $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\rho(A) < R$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ est bien défini et est normalement convergente.

Définition 32 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(A) < 1$. On définit le logarithme matriciel par : $\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$.

L'application $\ln$ est continue et de classe C^∞.

Proposition 33 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Lorsque tout est bien défini, on a :

$$\exp(\ln(A)) = A \quad \text{et} \quad \ln(\exp(A)) = A.$$

2) Homéomorphismes

Proposition 34 : L'application exp réalise un homéomorphisme entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes, d'inverse ln.

Corollaire 35 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$.

Proposition 36 : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Remarque 37 : Elle n'est pas injective car $\exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = I_2 = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 38 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \exists R \in GL_n(\mathbb{R}), A = R^2\}$.

[DEV 1]

Corollaire 39 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Théorème 40 : L'application exp réalise un homéomorphisme entre les matrices hermitiennes (respectivement symétriques réelles) et les matrices hermitiennes (resp. symétriques réelles) définies positives.

[DEV 2]

Corollaire 41 : De la décomposition polaire, on en déduit les homéomorphismes suivants :

$$GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

3) Théorème de Cartan

Lemme 42 : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

i) $\lim_{n \to +\infty} \left[\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right]^n = \exp(A+B)$

ii) $\lim_{n \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\exp\left(-\frac{A}{n}\right)\exp\left(-\frac{B}{n}\right)\right)^{n^2} = \exp(AB - BA)$

Définition/Proposition 43 : Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$. On définit $\mathfrak{g} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ; \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) \in G\}$.

Alors $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par l'application $(A, B) \mapsto AB - BA$. On l'appelle l'algèbre de Lie du groupe G.

Théorème de Cartan 44 : Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ est une sous-variété réelle de $GL_n(\mathbb{K})$.

[DEV 3]

Références : Rombaldi, Algèbre et géométrie

Rombaldi, Analyse matricielle

Mansuy-Mneimné, Réduction des endomorphismes, 3e édition

Mneimné-Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques